

1. Дайте определение точечного электрического заряда.

Точечный электрический заряд — это электрически заряженная материальная точка.

2. Фундаментальные свойства электрического заряда. Закон сохранения заряда.

Свойства:

1. Электрический заряд — это физическая скалярная величина, определяющая способность тел быть источником электромагнитных полей и принимать участие в электромагнитном взаимодействии.

2. Заряд существует в двух видах: положительный и отрицательный. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются.

3. Минимальный положительный заряд приблизительно равен $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. (элементарный заряд). Минимальный отрицательный заряд есть заряд электрона. Он равен элементарному заряду, взятому с противоположным знаком.

4. Электрический заряд дискретен, то есть заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда.

5. В природе отрицательных зарядов столько же, сколько положительных.

Возникновение заряженных тел обусловлено не рождением зарядов, а их перераспределением (происходящим, например, при трении).

Закон сохранения заряда:

1. Электроны и протоны — частицы с бесконечным временем жизни, их заряды инвариантны при переходе от одной инерциальной системы координат к другой и не зависят от скорости.

2. При любом процессе взаимопревращения частиц их суммарный заряд до взаимодействия равен суммарному заряду после взаимодействия. См. к.в. №37.

3. Сформулируйте Закон Кулона.

Два **неподвижных точечных** заряда q_1 и q_2 (два заряженных тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними) в **инерциальной** системе отсчёта взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной величинам зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния r_{12} между ними. Сила, с которой заряд q_1 действует на заряд q_2 :

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$
 Эта сила направлена по прямой, соединяющей заряды, и

является силой притяжения для разноименных зарядов и силой отталкивания для одноимённых. Вектор $\vec{r}_{12}$ направлен от заряда q_1 к заряду q_2 . В СИ

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2, \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2) .$$

Замечание: закон Кулона применим для расстояний от 10^{-15} м до 10^5 м

4. Дайте определение напряжённости электрического поля.

Напряжённость электрического поля — векторная величина, равная отношению силы, действующей на пробный точечный положительный покоящийся заряд в электрическом поле,

к величине этого заряда. $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$. **Замечание:** здесь слово «пробный» означает, что данный

заряд не оказывает влияния на конфигурацию зарядов, создающих электрическое поле.

5. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

Напряжённость электрического поля, создаваемого в любой точке пространства системой зарядов, равна сумме напряжённостей полей, создаваемых в этой точке зарядами системы по отдельности (в отсутствие всех остальных зарядов).

6. Дайте определение потока напряженности электрического поля.

Поток вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ через поверхность S_0 в сторону, соответствующую выбранному векторному полю нормалей $\vec{n}$, равен

$$\iint_{S_0} \vec{E} d\vec{S}, \text{ где } d\vec{S} = dS \vec{n}.$$

7. Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса.

Поток вектора напряжённости электрического поля через любую замкнутую поверхность пропорционален заключённому внутри этой поверхности электрическому заряду.

$$\Phi_E = \iint_{S_0} \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}. \text{ В дифференциальной форме:}$$

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, где $\rho = \rho(x, y, z)$ – объёмная плотность заряда в объёме, заключённом внутри поверхности.

8. Напряженности электростатических полей равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости.

Сфера, по которой равномерно распределён заряд Q : 1.) не создаёт электрическое поле

внутри сферы, 2.) в точках вне сферы создаёт поле с напряжённостью $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$, где z

— расстояние от точки до центра сферы, 3.) на поверхности сферы создаёт поле с

напряжённостью $E = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}$, где a — радиус сферы. Вектор напряжённости направлен

вдоль прямой, проходящей через центр сферы и рассматриваемую точку.

Бесконечная плоскость, равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ , создаёт электрическое поле с напряжённостью $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ в любой точке пространства вне

плоскости. Вектор напряжённости в каждой точке направлен перпендикулярно плоскости.

9. Запишите граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля.

На границе двух сред проекции вектора $\vec{E}$ на любое касательное к границе направление удовлетворяют соотношению: $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$. Доказательство: рассмотрим границу двух сред и прямоугольный контур, пара сторон которого перпендикулярна границе, такой, что граница делит его на две равные части. Вследствие потенциальности электростатического поля, циркуляция вектора его напряжённости по любому замкнутому контуру равна нулю.

Запишем это условие для данного контура, после чего устремим длину перпендикулярной границе стороны прямоугольника к нулю. Получим искомое соотношение.

Материальные уравнения для электрического поля (см к.в. 31) связывают вектор индукции электрического поля с вектором напряжённости электрического поля. С их помощью граничные условия для вектора индукции (см к.в. 30) могут быть преобразованы в аналогичные условия для нормальной составляющей вектора напряжённости электрического поля.

10. Как связана с зарядами дивергенция вектора напряженности электрического поля.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ где } \rho = \rho(x, y, z) \text{ — объёмная плотность заряда. См. к.в. 8.}$$

11. Запишите формулы для напряженности электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.

Дискретный случай: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$ Непрерывный случай:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}', \text{ где } d\vec{r}' = dx' dy' dz'$$

Следует из принципа суперпозиции (см к.в. 4, к.в. 5).

12. Как определяется потенциал электрического поля.

Потенциалом электрического поля в точке М называется скалярная величина, равная отношению работы электрического поля по перемещению пробного заряда из этой точки в точку О, в которой потенциал положили равным нулю, к величине этого заряда.

$$\varphi(M) = \int_M^O \vec{E} d\vec{r}$$

Потенциал электрического поля является энергетической характеристикой поля.

В силу потенциальности электрического поля значение интеграла не зависит от траектории интегрирования.

13. Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.

Дискретный случай: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$

Непрерывный случай: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

14. Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля.

$$\vec{E} = -grad\varphi \quad \text{Док-во: } \vec{E}_i = \frac{q_i \vec{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} = -grad\left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}\right) = -grad\varphi_i, \text{ суммируя по } i,$$

получаем конечную формулу.

15. Приведите примеры эквипотенциальных поверхностей.

Эквипотенциальными поверхностями называют поверхности равного потенциала. Так как компонента вектора $grad\varphi$, касательная к эквипотенциальной поверхности, всегда равна нулю, силовые линии поля в каждой точке направлены по нормали к соответствующей эквипотенциальной поверхности. Эквипотенциальные поверхности электрического поля, создаваемого точечным зарядом — сферы с центрами в этом заряде. Эквипотенциальные поверхности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, есть бесконечные плоскости, параллельные этой заряженной плоскости.

16. Что такое электрический диполь. Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя.

Электрический диполь — это система из двух точечных зарядов, одинаковых по модулю (q), противоположных по знаку, находящихся на фиксированном расстоянии (l) друг от друга.

Диполь характеризуется его электрическим дипольным моментом $\vec{p}_l = q \vec{l}$, где $\vec{l}$ проводится от отрицательного заряда к положительному.

Если поле, создаваемое диполем, рассматривается на расстоянии, много большем l , диполь называют точечным.

Пусть начало отсчёта выбрано в центре отрезка, соединяющего заряды диполя.

Потенциал поля электрического диполя: $\varphi(\vec{r}) = \frac{(\vec{r}, \vec{p}_l)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

Напряжённость поля электрического диполя: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{p}_l, \vec{r}) - \vec{p}_l r^2}{r^5} \right)$

Пусть θ – угол между диполем и направлением на точку.

Тогда напряжённость в этой точке равна $E(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_l \sqrt{1 + 3\cos^2(\theta)}}{r^3}$.

Формулы получены в предположении, что $l \ll r$.

17. Дайте определение электрического дипольного момента нейтральной системы зарядов.

Нейтральная система зарядов — такая система, сумма зарядов которой равна нулю.

Выберем начало отсчёта «внутри» этой системы зарядов и запишем выражение для потенциала поля, создаваемого этой системой, в точке, расстояние от системы до которой много больше, чем расстояния между зарядами системы:

$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ С учётом малости $\vec{r}_i$ относительно $\vec{r}$, можем написать такое

разложение в ряд Маклорена: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \left\{ \frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^3 x_{i\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} + \dots \right\} = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots$

$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r}$ - обращается в ноль для нейтральной системы.

$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^3 q_i x_{i\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\vec{d} * \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right)) = \frac{(\vec{d}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, где

$\vec{d} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i$ - дипольный момент системы зарядов.

18. Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ В силу принципа суперпозиции, достаточно провести доказательство для напряжённости поля, создаваемого одним точечным зарядом.

Применим формулу Стокса к замкнутому контуру и поверхности, которую он ограничивает

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \iint_S (\text{rot } \vec{E})_n dS = \{ \text{в силу равенства } \text{rot } \vec{E} = 0 \text{ (см. к.в. №20)} \} = 0$$

Суммируя по всем зарядам системы, получаем аналогичное выражение для системы точечных зарядов.

19. Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

$\text{rot } \vec{E} = 0$ В силу принципа суперпозиции, достаточно провести доказательство для напряжённости поля, создаваемого одним точечным зарядом.

$$\begin{aligned} \text{rot}(\alpha \vec{a}) &= \alpha \text{rot } \vec{a} + [\text{grad } \alpha \times \vec{a}], \quad \vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \text{rot } \vec{E} = \text{rot} \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \text{rot } \vec{r} + [\text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) \times \vec{r}] \right\} = \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Суммируя по всем зарядам системы, получаем аналогичное выражение для системы точечных зарядов.

20. Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля.

Уравнение Пуассона: $\Delta \varphi(\vec{r}) = \text{div grad } \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0 \epsilon}$, где ϵ - диэлектрическая проницаемость среды. (см. к.в. №11, 15, 28).

Уравнение Лапласа (если в рассматриваемой точке плотность заряда - нулевая):

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = 0$$

21. Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника. Приведите доказательства утверждений.

Поскольку рассматривается электростатика, внутри проводника нет токов, значит, нет и поля, т. к. иначе под его действием возникали бы токи. Итак, $\vec{E} = 0$. Теперь рассмотрим произвольную замкнутую поверхность внутри проводника и применим к ней электростатическую теорему Гаусса (см. к.в. 8). Поскольку $\vec{E} = 0$ внутри проводника, в любом объеме внутри него суммарный заряд равен нулю: $Q = 0$. Поскольку $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ (см. к.в. №15), $\varphi = \text{const}$ внутри проводника, что позволяет говорить о потенциале проводника.

22. Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов.

Применим теорему Гаусса к малому параллелепипеду, ограничивающему часть поверхности проводника. Поток вектора напряженности через «внешнюю» по отношению к проводнику грань отличен от нуля, потоки через остальные грани равны нулю (внутри проводника нет поля $\Rightarrow$ поток через «внутреннюю» грань равен нулю, остальные грани параллельны вектору напряженности). Отсюда: $\vec{E} S = \frac{Q}{\epsilon_0}$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

23. Плоский конденсатор и его емкость.

Конденсатором называют пару проводников, расстояние между которыми много меньше расстояний до остальных тел. При этом проводники называют обкладками конденсатора. Конденсатор считается заряженным, если обе обкладки заряжены с одинаковым по модулю и противоположным по знаку зарядом. Модуль этого заряда Q называется зарядом конденсатора. Если конденсатор заряжен, между его обкладками возникает разность потенциалов:

$U = \frac{Q}{C}$, где C — ёмкость конденсатора. Ёмкость конденсатора — это его

геометрическая характеристика, зависящая также от диэлектрических свойств среды между обкладками. Плоским называют конденсатор, состоящий из двух параллельных одинаковых проводящих пластин площадью S , разделённых диэлектриком. Расстояние между пластинами d считается много меньше линейного размера пластины. Ёмкость плоского конденсатора равна $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, находящейся между обкладками.

24. Как рассчитать емкость батареи конденсаторов.

Алгоритм расчёта ёмкости батареи конденсаторов:

1.) Мысленно включить батарею в цепь. Пусть на батарее создана разность потенциалов U .

2.) Зарядить батарею. Для этого разместить на одной из обкладок какого-либо конденсатора некоторый заряд, после чего записать, чему равны заряды на других обкладках из соображений: на двух обкладках одного конденсатора заряды равны по модулю и противоположны по знаку, сумма зарядов на любом изолированном проводнике равна нулю. Повторять до тех пор, пока не будут известны заряды всех конденсаторов.

3.) Для каждого независимого контура выбрать две точки этого контура и записать равенство падений напряжений между этими двумя точками, отталкиваясь от формулы $U = \frac{q}{C}$.

4.) Аналогичным образом выразить напряжение на всей батарее.

5.) Заменить батарею одним конденсатором, заряды на обкладках которого равны суммарным зарядам на «внешних» обкладках «внешних» конденсаторов батареи (см. обведённые в

примере заряды). Пусть его ёмкость - C_0 , напряжение на нём равно напряжению на исходной батарее U . Записать: $U = \frac{q_0}{C_0}$.

6.) Решить получившуюся систему уравнений, найти C_0 .

Пример решения задачи:

The diagram shows a circuit with three capacitors, each with capacitance C . The left capacitor has charges $-q_1$ and q_1 . The middle capacitor has charges $-q_2$ and q_2 . The right capacitor has charges $-q_3$ and q_3 . A central node is connected to the middle plate of the first capacitor, the top plate of the second capacitor, and the bottom plate of the third capacitor. The charges on these plates are labeled as $q_2 - q_1$, $q_1 - q_2$, and $q_3 + q_1 - q_2$ respectively. The circuit is connected to points A and B with a voltage U .

The equations derived from the circuit are:

$$\left\{ \begin{aligned} OA: \frac{q_1}{C} &= \frac{q_2 - q_1}{C} + \frac{q_3}{C}; \quad OB: \frac{-q_2}{C} = \frac{q_2 - q_1}{C} + \frac{q_3 + q_1 - q_2}{C}; \\ BA: \frac{q_2 + q_1}{C} &= U; \end{aligned} \right.$$

The equivalent circuit is shown as a single capacitor with capacitance C_0 between points A and B, with charges $-q_1 + q_3$ and $q_1 + q_3$ on its plates. The equation for this equivalent circuit is:

$$BA: U = \frac{q_1 + q_3}{C_0};$$

Equating the two expressions for U gives:

$$\Rightarrow \frac{q_1 + q_3}{C_0} = \frac{q_2 + q_1}{C}; \quad C_0 = \frac{q_1 + q_3}{q_1 + q_2} C;$$

From the first equation, it follows that $q_2 = q_3$, which leads to:

$$\Rightarrow C_0 = C;$$

25. Дайте определение вектора электрической поляризации.

Вектор электрической поляризации — это векторная физическая величина, равная дипольному моменту единицы объёма вещества, возникающему при его поляризации. Количественная характеристика диэлектрической поляризации. В не очень сильных электрических полях для большинства материальных сред вектор поляризации пропорционален напряжённости поля $\vec{E}$:

$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$. Коэффициент χ называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика.

26. Что такое электрическая индукция поля.

Электрическая индукция поля — это векторная физическая величина, определяющаяся по следующей формуле:

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, где $\vec{E}$ — напряжённость электрического поля, $\vec{P}$ — электрическая поляризация диэлектрика, χ — диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, $\epsilon = 1 + \chi$ — диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

27. Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и

дифференциальной формах.

Поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность пропорционален заключённому внутри этой поверхности свободному электрическому заряду.

$$\Phi_D = \iint_{S_0} \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \iiint_V \rho_{\text{своб}} dV = Q_{\text{своб}}.$$

В дифференциальной форме: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}$

28. Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют?

На границе двух сред проекции вектора $\vec{D}$ на нормаль, проведённую к границе из второй среды в первую, удовлетворяют соотношению: $D_{n1} - D_{n2} = \sigma$, где σ - поверхностная плотность свободных зарядов, находящихся на границе. Доказательство: Рассмотрим параллелепипед, пара граней которого параллельна границе, такой, что граница делит его на две равные части. Запишем для него теорему Гаусса (см. к.в. 29). Распишем выражение для потока как сумму потоков через грани, параллельные границе, и потоков через остальные грани, после чего устремим длину перпендикулярной границе стороны параллелепипеда к нулю. Учитывая, что $Q_{\text{своб}} = \sigma S$, получим искомое выражение.

29. Материальные уравнения для электрического поля, диэлектрическая восприимчивость и проницаемость.

Материальные уравнения для электрического поля: $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$

См. к.в. 27, 28.

ИНФОРМАЦИЯ О СОБСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ ЗАРЯДА

30. Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда.

Взаимная энергия системы точечных зарядов: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{q_i q_k}{4 \pi \epsilon_0 r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi'_i$, где φ'_i - потенциал, создаваемый в данной точке всеми зарядами, кроме q_i .

31. Энергия системы непрерывно распределённых зарядов (формула).

$$W = \frac{1}{2} \oint \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV, \text{ где } \rho - \text{объёмная плотность заряда, } \varphi - \text{потенциал.}$$

32. Запишите формулы для энергии электростатического поля и её объёмной плотности.

Объёмная плотность энергии электростатического поля: $w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2$

Энергия электростатического поля: $W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \epsilon_0 E^2 dV$

33 Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле.

Сила, действующая на точечный диполь с дипольным моментом $\vec{p}_l$ в неоднородном электрическом поле $\vec{E}(\vec{r})$: $\vec{F} = (\vec{p}_l * \vec{\nabla}) \vec{E}$. Вывод: рассмотрим диполь малого, но конечного размера. Разместим его центр в начале координат, направим ось X по дипольному моменту. $F_x = q[E_x(l/2, 0, 0) - E_x(-l/2, 0, 0)]$. Разложив напряжённость поля в

окрестности начала координат в ряд Тейлора, получим: $F_x = q \frac{\partial E_x}{\partial x} l = q(\vec{l} * \vec{\nabla}) E_x$.

Объединяя аналогичные скалярные равенства для y и z компонент, получим искомое выражение.

Момент силы, действующей на точечный диполь в электрическом поле:

$$\vec{M} = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] = \left[\frac{\vec{l}}{2} \times q \vec{E}_1\right] + \left[-\frac{\vec{l}}{2} \times -q \vec{E}_2\right] = \{ \text{в силу малости размера диполя, } \vec{E}_1 \approx \vec{E}_2 \} = [\vec{p}_l \times \vec{E}]$$

34. Дайте определения силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними.

Сила электрического тока I — это физическая величина, равная отношению количества заряда ΔQ , прошедшего через некоторую поверхность (часто рассматривается поперечное сечение проводника) за время Δt , к величине этого промежутка времени: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Плотность тока $\vec{j}$ — это векторная физическая величина, имеющая смысл силы электрического тока, протекающего через элемент поверхности единичной площади. Направление вектора плотности тока совпадает с направлением тока. Если плотность тока распределена равномерно и параллельна нормали к поверхности, через которую протекает ток, то $j = |\vec{j}| = \frac{I}{S}$.

35. Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.

Интегральная форма: $\frac{\partial Q}{\partial t} = - \int_{S_0} \vec{j} d\vec{S}$. Смысл: количество заряда, вытекающего в единицу времени через поверхность, равно силе тока через неё.

Выполним преобразования: $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$, $\int_{S_0} \vec{j} d\vec{S} = \int_{V_0} \text{div } \vec{j} dV$

Дифференциальная форма: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$.

РАССМАТРИВАЕТСЯ СЛУЧАЙ БЕЗ СТОРОННИХ СИЛ (ЭДС)

36. Условие стационарности тока. Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма.

Электрический ток называют стационарным (постоянным), если его сила (I) не изменяется со временем не по модулю, не по направлению.

Интегральное условие стационарности: $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$ (из закона сохранения заряда

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \oint_S \vec{j} d\vec{S} \text{ с учетом } \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

Дифференциальное условие стационарности: $\text{div } \vec{j} = 0$ (из условия непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \text{ с учетом } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$U = \phi_1 - \phi_2 = IR$, где U — падение напряжения (или напряжение) на данном участке цепи, R — сопротивление данного участка цепи. Величина U имеет смысл работы, совершаемой электростатическими силами при перемещении единичного положительного заряда.

Дифференциальная форма: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, где σ — удельная проводимость проводника (см к.в. №39).

37. Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника.

Сопротивление R проводника между точками 1 и 2 — это его геометрическая характеристика, зависящая также от его проводящих свойств, равная отношению напряжения между этими точками к силе тока, протекающего в проводнике.

Удельное сопротивление однородного проводника с длиной l и площадью поперечного сечения S : $\rho = \frac{R \cdot S}{l}$.

Удельное сопротивление в случае проводника произвольной формы и произвольных характеристик является функцией координаты точки и может быть введено как коэффициент пропорциональности между вектором напряжённости электрического поля и вектором плотности тока в этой точке: $\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r})$.

Проводимость и удельная проводимость могут быть введены как величины, обратные сопротивлению и удельному сопротивлению соответственно.

Под проводимостью часто понимают удельную проводимость: $\lambda = \frac{1}{\rho}$.

38. Как рассчитать сопротивление батареи проводников? Убедите экзаменатора в умении это делать. (???????????)

Если резисторы соединены последовательно, то общее сопротивление равно сумме всех сопротивлений, если параллельно – единица, делённая на общее, равна сумме единиц, делённых на сопротивления резисторов.

Подъём напряжение U на всю систему сопротивлений. Говорим, что в неё входит ток I . Далее по правилам Кирхгофа делим токи ($I \rightarrow I_1 + (I - I_1) \dots$), составляем систему уравнений.

Рассматриваем независимые контуры (между двумя узлами цепи): падение напряжений по одной дуге контура равно падению напряжений по другой. (второе правило Кирхгофа). Далее берём точки на контактах. $U = IR$

39. Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма. Сформулируйте правила Кирхгофа. Убедите экзаменатора в умении их применять.

Закон Джоуля-Ленца: Мощность тепла, выделяющегося в единице объёма среды при протекании постоянного электрического тока, равна произведению плотности электрического тока на величину напряжённости электрического поля.

Дифференциальная форма: $w = \vec{j} * \vec{E} = \lambda E^2$, где λ – удельная проводимость среды (см. к.в. №39).

Интегральная форма для случая тока в тонком проводе:

Количество теплоты, выделяющейся в единицу времени в рассматриваемом участке цепи, пропорционально произведению квадрата силы тока на этом участке и сопротивления участка.

$$N = UI = I^2 R$$

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма всех токов, втекающих в любой узел, равна нулю. При этом токи, текущие к узлу, считаются имеющими один знак (плюс или минус), а токи, текущие от узла, считаются имеющими другой знак (минус или плюс).

Второе правило Кирхгофа: для любого контура сумма падений напряжения на его элементах равна сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

40. Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих э.д.с.

Для любой электрической цепи верен закон сохранения энергии, согласно которому в течение заданного промежутка времени $[t_1, t_2]$

$$A_{\text{мех}} + A_{\text{б}} = \Delta W + Q,$$

где $A_{\text{мех}}$ – работа внешних механических сил (например, когда сдвигают обкладки конденсатора, явно воздействуют на цепь внешними силами); $A_{\text{б}}$ – работа всех источников (работа батареек); $\Delta W = W(t_2) - W(t_1)$ – изменение энергии электрической цепи; Q – количество теплоты, выделяемой в цепи в этом временном промежутке.

Энергия электрической цепи $W(t)$ – суммарная энергия всех конденсаторов и катушек индуктивности.

Энергия конденсатора:

$$W_c = \frac{CU_c^2}{2} = \frac{q}{2C} = \frac{qU}{2},$$

где C – ёмкость конденсатора, U_c – напряжение на нём, q – его заряд.
Энергия катушки:

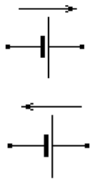
$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{\Phi I}{2},$$

где L – индуктивность катушки, I – сила тока, протекающего через катушку, Φ – магнитный поток, пронизывающий катушку.

Теплота Q в электрической цепи выделяется только на резисторах, через которые протекает электрический ток. Если в цепи нет резисторов или они есть, но через них не протекает ток, то в этой цепи не будет выделяться теплота.

Как посчитать работу A_6 отдельно взятого источника с ЭДС E ?

Пусть за промежуток времени $[t_1, t_2]$ через источник протек заряд q .

- 
- Если заряд протекал по направлению действия сторонних сил этого источника, то источник совершил положительную работу $A_6 = Eq$ (рабочий режим).
 - Если заряд протекал по направлению, противоположному действию сторонних сил этого источника, то источник совершил отрицательную работу $A_6 = -Eq$ (режим перезарядки).

41. Запишите закон взаимодействия элементов тока – закон Ампера.

Пусть есть два коротких (таких, что их можно считать отрезками) участка проводника с длинами l_1, l_2 , в которых текут токи I_1, I_2 соответственно. Тогда первый из них действует на второй с силой $d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 [d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}]]}{4\pi r_{12}^3}$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/A}^2$,

$\vec{r}_{12}$ – вектор, идущий от первого участка проводника ко второму, $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ – векторы с длинами l_1, l_2 , направленные по соответствующим токам.

42. Не противоречит ли закон Ампера третьему закону Ньютона.

В общем случае закон Ампера противоречит третьему закону Ньютона, так как векторы $d\vec{F}_{12}$ и $d\vec{F}_{21}$ могут даже не быть коллинеарными. Однако при интегрировании выражения для закона Ампера по двум замкнутым контурам получаем:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}]]}{r_{12}^3}. \text{ Для этой силы выполнен третий закон Ньютона.}$$

Таким образом, закон Ампера выполнен с точностью до слагаемых, которые дают нулевой вклад в результирующий интеграл. **Замечание:** постоянный ток может течь только в замкнутом контуре.

43. Что такое вектор магнитной индукции поля. Запишите закон Био-Савара-Лапласа.

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ – величина, являющаяся силовой характеристикой магнитного поля в данной точке пространства. Пусть по контуру L , находящемуся в вакууме, течёт ток I , $\vec{r}_0$ – точка, в которой ищется поле. Тогда согласно закону Био-Савара-Лапласа

$$\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})]}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}, \text{ где } \mu_0 \approx 1,25663 \cdot 10^{-6} \text{ H/A}^2$$

44. Чему равна индукция магнитного поля прямого бесконечного провода с током.

Решим сначала задачу в общем случае. Пусть ось Z направлена по проводу по направлению тока, точка начала отсчёта лежит на проводе. Пусть «начало» провода имеет координату $-l_2$, «конец» имеет координату l_1 . Рассмотрим точку, радиус-вектор которой $\vec{r}$

перпендикулярен проводу и имеет длину r . Тогда

$$B(r) = \int_{-l_2}^{l_1} \frac{\mu_0 I r dz}{4\pi \sqrt{(r^2 + z^2)^3}} = \{ \text{замена } x = z/r, \text{ затем } x = \operatorname{tg} y \} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} * \left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + r^2}} - \frac{-l_2}{\sqrt{l_2^2 + r^2}} \right)$$

Подставив $l_1 = \infty, l_2 = \infty$, получим ответ: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Направление $\vec{B}$ может быть найдено по правилу правого винта.

45. Сформулируйте теорему о циркуляции магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.

Циркуляция вектора магнитной индукции по всякому замкнутому контуру пропорциональна сумме сил токов, пронизывающих этот контур.

В интегральной форме: $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} = \mu_0 \sum I_k$

В дифференциальной форме: $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

46. Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю

В интегральной форме: $\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$

В дифференциальной форме: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

47. Что такое векторный потенциал. Как он связан с магнитной индукцией.

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \rightarrow$ решение уравнения $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ можно представить в виде $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, где $\vec{A}$ – векторный потенциал магнитного поля

Векторным потенциалом электромагнитного поля называется векторное поле

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{Связь с магнитной индукцией: } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Неоднозначность: если потенциал $\vec{A}$ описывает поле с индукцией $\vec{B}$, то и потенциал

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi \quad \text{при произвольной функции } \chi \text{ описывает то же самое поле } \vec{B}$$

Условие калибровки - $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Свойства: $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ (по аналогии с выражением для потенциала электрического поля)

$$\text{Отсюда следует: } \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^N \vec{I}_k$$

48. Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током.

Пример 7.3. По кольцу радиуса R течет ток I . Найдите индукцию магнитного поля $\vec{B}$ в точке, расположенной на перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его центра.

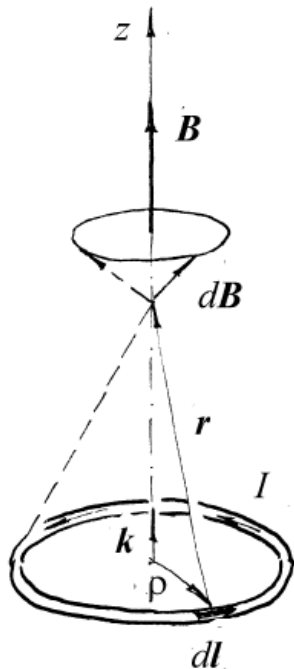


Рис.7.3

Решение. Воспользуемся формулой (7.4). При интегрировании по $d\vec{l}$ учтем, что $r = \sqrt{R^2 + z^2} = \text{const}$ (см. рис. 7.3). Введем вектор $\vec{\rho}$ так, что $\vec{r} = \vec{k}z - \vec{\rho}$ ($\vec{k}$ – орт оси Oz). Подставив $\vec{r}$ в (7.4), получим $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ \oint [d\vec{l}, \vec{k}z] + \oint [\vec{\rho}, d\vec{l}] \right\}$. Поскольку вдоль пути интегрирования $\vec{k}z = \text{const}$, то $\oint [d\vec{l}, \vec{k}z] = \left[\oint d\vec{l}, \vec{k}z \right] = 0$, так как $\oint d\vec{l} = 0$. Кроме того, $\oint [\vec{\rho}, d\vec{l}] = 2\vec{S} = 2\vec{k}S = 2\vec{k}\pi R^2$. Поэтому

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (7.19)$$

$$\vec{B}(M) = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (7.4)$$

49. Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле. Элементарный ток – ток в замкнутом элементарном контуре малых размеров.

$$\vec{M} = I \oint_L [\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}]] = [\vec{p}_m, \vec{B}] \quad \text{– момент сил.}$$

Контур стремится занять устойчивое положение, при котором момент сил равен нулю. При этом $\vec{p}_m$ становится сонаправлен с $\vec{B}$.

$$\vec{F} = I \oint_L [d\vec{l}, \vec{B}] = 0 \quad (\text{для однородного поля});$$

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p}_m, \vec{B}) \quad (\text{для неоднородного поля}).$$

НА ЛЕКЦИЯХ В ЭТОМ МЕСТЕ РАССМАТРИВАЛОСЬ ТОЛЬКО МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

50. Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях.

Если частица с зарядом q движется со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с магнитной индукцией $\vec{B}$, то на эту частицу действует сила, носящая название силы Лоренца:

$\vec{F}(\vec{r}) = q[\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})]$ Работа силы Лоренца всегда равна нулю, так как вектор силы всегда ортогонален вектору скорости. Следовательно, при движении частицы в магнитном поле, её энергия — величина постоянная.

Направим ось X по $\vec{B}$, и пусть угол между $\vec{v}$ и $\vec{B}$ равен α . Для составляющей $\vec{v}$, параллельной $\vec{B}$ справедливо: $v_x = \text{const}$.

Для составляющей $\vec{v}$, перпендикулярной $\vec{B}$ справедливо:

$$\frac{mv_y^2}{r} = qBv_y, \quad v_y = \frac{qBr}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Если $\vec{v} \perp \vec{B}$, частица будет двигаться по окружности. Если $\vec{v} \parallel \vec{B}$, то $\vec{v} = \text{const}$.

В иных случаях частица будет двигаться по спирали.

51. Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея и правило Ленца.

Закон Фарадея: При движении проводящего материала (проводника) внутри магнитного поля, в проводнике создается электрический ток. Такой ток называется индукционным. При любом изменении магнитного потока, сцепленного с проводящим замкнутым контуром, в этом контуре возникает ЭДС индукции, которая определяется по формуле:

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

$d\Phi$ - изменение магнитного потока. Φ определяется по формуле: $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$, где S-

площадь контура, через который проходит магнитный поток, а B- магнитная индукция.

Правило Ленца: Ток, создаваемый индукцией в проводнике, направлен так, что создаваемое им магнитное поле ослабевает изменение внешнего магнитного поля, следовательно препятствует движению проводника.

52. В чем заключается явление самоиндукции.

Самоиндукция – частным случаем электромагнитной индукции. Возникновение в цепи ЭДС индукции вследствие изменения силы тока в ней. Если ток в рассматриваемом контуре по каким-то причинам изменяется, то изменяется и магнитное поле этого тока, а, следовательно, и собственный магнитный поток, пронизывающий контур. В контуре возникает ЭДС самоиндукции, которая согласно правилу Ленца препятствует изменению тока в контуре. Собственный магнитный поток Φ , пронизывающий контур или катушку с током, пропорционален силе тока I:

$$\Phi = LI.$$

Коэффициент пропорциональности L в этой формуле называется коэффициентом самоиндукции или индуктивностью катушки. Единица индуктивности в СИ называется генри (Гн). Индуктивность контура или катушки равна 1 Гн, если при силе постоянного тока 1 А собственный поток равен 1 Вб.

53. Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность).

Коэффициент самоиндукции (индуктивность) – это отношение магнитного потока поля, пронизывающего контур или катушку, вызванного текущим по контуру током, к силе этого тока. (см. 57)

54. В чем заключается явление взаимной индукции.

Взаимоиндукция (взаимная индукция) — явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре, при изменении силы тока во втором контуре, и наоборот. Взаимоиндукция — частный случай электромагнитной индукции.

При изменении силы тока в первом контуре, во втором возникает ЭДС

$$\varepsilon_2 = -\left(\frac{d\Phi_1}{dt}\right) = -L\left(\frac{dI_1}{dt}\right), \text{ где}$$

ε_2 - электродвижущая сила во втором контуре,

Φ_1 - полный магнитный поток первого контура

I_1 - сила тока в первом контуре,

L - взаимная индуктивность контуров.

При изменении силы тока во втором контуре, в первом возникает ЭДС

$$\varepsilon_1 = -\left(\frac{d\Phi_2}{dt}\right) = -L\left(\frac{dI_2}{dt}\right), \text{ где}$$

ε_1 - электродвижущая сила в первом контуре,

Φ_2 - полный магнитный поток второго контура

I_2 - сила тока во втором контуре,

L - взаимная индуктивность контуров.

Явление взаимной индукции применяется для повышения и понижения напряжения переменного тока в трансформаторах.

55. Чему равна собственная энергия электрического тока.

Собственная энергия тока численно равна работе, которую должен совершить источник тока для преодоления ЭДС самоиндукции, чтобы создать ток в цепи:

$$W_M = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \Phi$$

56. Запишите формулы для энергии магнитного поля и ее объемной плотности.

Объемная плотность энергии магнитного поля в каждой точке пространства равна:

$$w_M = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H},$$

где B – магнитная индукция, а H – напряженность магнитного поля в этой точке. Последняя формула справедлива не только для поля, создаваемого катушками с током, но и для произвольного магнитного поля.

Энергия выражается через свою объемную плотность:

$$W_M = \int_{V_0} w_M dV$$

57. Энергия системы замкнутых контуров с током (формула).

Энергия системы замкнутых контуров равна сумме энергий контуров с учётом их взаимодействия (взаимоиндукция). Например, для двух индуктивно связанных катушек с токами I_1, I_2 :

$$W_M = \frac{1}{2} (I_1 \cdot \Phi_1 + I_2 \cdot \Phi_2) = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + L_{12} \cdot I_1 \cdot I_2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2$$

58. Молекулярные токи и вектор намагниченности.

Тело, помещенное во внешнее магнитное поле, намагничивается и создает собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее поле по принципу суперпозиции.

Согласно гипотезе Ампера, частицы, из которых состоит тело, можно рассматривать как маленькие контуры, обтекаемые так называемыми молекулярными (или амперовыми) токами, связанными с орбитальным движением электронов. Следовательно, возникновение

дополнительного магнитного поля можно объяснить ориентацией этих контуров во внешнем магнитном поле.

Для макроскопического описания магнитного поля в веществе вводится усредненная по объему вещества его характеристика – вектор намагниченности:

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{m_i}}{\Delta V},$$

где $\vec{p}_{m_i}$ – магнитные моменты всех амперовых токов, оказавшихся внутри бесконечно малого объема ΔV .

59. Дайте определение вектора напряженности магнитного поля.

Величина вектора $\vec{J}$ зависит от индукции внешнего поля и от свойств рассматриваемого вещества. Эта связь задается материальным уравнением и считается известной из опыта. Для удобства описания магнитного поля в материальных средах вводится вектор напряженности магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j}$$

60. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (в интегральной и дифференциальной формах).

В произвольной намагниченной среде циркуляция вектора напряженности магнитного поля

$\vec{H}$ по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов I , которые охватываются этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} \equiv I \quad \text{– интегральная форма,}$$

где каждый ток, охватываемый контуром, считается положительным (отрицательным), если из конца вектора плотности этого тока обход виден против часовой стрелки (по часовой стрелке).

$$\text{rot } \vec{H} \equiv \vec{j} \quad \text{– дифференциальная форма,}$$

где $\vec{j}$ – плотность тока проводимости в рассматриваемой точке пространства.

61. Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.

Материальные уравнения не выражают, в отличие от уравнений Максвелла, фундаментальные законы электромагнитного поля, а описывают свойства реальных сред. Обычно их записывают в форме:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

где ϵ – диэлектрическая, а μ – магнитная проницаемость среды; $\vec{H}$ и $\vec{E}$ – напряженность, соответственно, магнитного и электрического поля, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ – соответственно, электрическая и магнитная индукция.

Магнитная восприимчивость (χ) — физическая величина, характеризующая связь между магнитным моментом $\vec{J}$ (намагниченностью) вещества и напряжённостью магнитного поля $\vec{H}$ в этом веществе.

Магнитная проницаемость (μ) — физическая величина, коэффициент (зависящий от свойств среды), характеризующий связь между магнитной индукцией $\vec{B}$ и напряжённостью магнитного поля $\vec{H}$ в веществе. Она связана с магнитной восприимчивостью формулой:

$$\mu = 1 + \chi.$$

62. *Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.*

На границе раздела двух сред с различными значениями μ нормальные компоненты вектора B непрерывны; по теореме о циркуляции в отсутствие на границе раздела поверхностных токов проводимости тангенциальные компоненты вектора H также непрерывны:

$$B_{n_1} = B_{n_2}; H_{\tau_1} = H_{\tau_2}.$$

Тангенциальные компоненты вектора B на границах претерпевают разрыв. Физически это связано с разрывом вектора намагниченности $\vec{j}$ и может быть объяснено протеканием по границе поверхностного молекулярного тока, плотность которого равна величине скачка тангенциальной составляющей вектора намагниченности.

63. *Что такое ток смещения.*

Точные решения уравнений Максвелла удается найти лишь в редких случаях. Обычно приходится делать те или иные упрощения. Для прикладных задач часто используют квазистационарное приближение. Оно основано на пренебрежении током смещения (членом

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

) в первом уравнении. Физически это эквивалентно пренебрежению запаздыванием поля при его распространении от источника до точки наблюдения

64. *Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме.*

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\text{div } \vec{B} = 0;$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho,$$

где H и E – напряженность, соответственно, магнитного и электрического поля, D и B – соответственно, электрическая и магнитная индукция, j – плотность тока проводимости, а ρ – объемная плотность свободного заряда.

65. *Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.*

$$\oint_s \vec{D} ds = Q$$

(Поток электрической индукции через замкнутую поверхность пропорционален величине свободного заряда, находящегося в объёме, ограниченном этой поверхностью.)

$$\oint_s \vec{B} ds = 0$$

(Поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю (магнитные заряды не существуют).)

$$\oint_l \vec{E} dl = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} ds$$

(Изменение потока магнитной индукции, проходящего через незамкнутую поверхность s , взятое с обратным знаком, пропорционально циркуляции электрического поля на замкнутом контуре l , который является границей поверхности s .)

$$\oint_l \vec{H} dl = I + \frac{d}{dt} \int_s \vec{D} ds$$

(Полный электрический ток свободных зарядов и изменение потока электрической индукции через незамкнутую поверхность s пропорциональны циркуляции магнитного поля на замкнутом контуре l , который является границей поверхности s .)

66. Сколько решений имеет система уравнений Максвелла. Ответ обоснуйте.
 При заданные граничных и начальных условиях решение системы уравнений Максвелла единственно. Пусть задана система уравнений максвелла и граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 ; \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho ; \\ \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} ; \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} ; \end{array} \right\}$$

Последние два можно представить в виде:

$$\vec{D}_{n2} - \vec{D}_{n1} = 0 ; \quad \vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1} = 0 ; \quad \vec{E}_{\tau 2} - \vec{E}_{\tau 1} = 0 ; \quad \vec{H}_{\tau 2} - \vec{H}_{\tau 1} = \vec{i}$$

Единственность решения:

$$\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 = \mathbf{D} \quad \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mathbf{B} \quad \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E} \quad \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

$$\text{В начальный момент времени} \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \operatorname{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \quad \mathbf{b} = \mathbf{H} \quad \mathbf{a} = \mathbf{E}$$

$$\begin{aligned} \int_V \sigma \mathbf{E}^2 dv &= \int_V \mathbf{E} \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV = \int_V \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} dv - \int_V \operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dv - \\ &- \varepsilon \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dv = -(\mu \mu_0)^{-1} \int_V \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv - \int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] d\mathbf{S} - \varepsilon \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dv = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2 \mu \mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dv \right) \end{aligned}$$

$= 0$
Нулевые граничные условия

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2 \mu \mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dv \right) = - \int_V \sigma \mathbf{E}^2 dv \leq 0$$

С ростом t $\int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2 \mu \mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dv$ уменьшается, но из-за нулевых

начальных условий $\left(\int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2 \mu \mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dV \right)_{t=0} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{D} = 0, \mathbf{E} = 0, \mathbf{B} = 0, \mathbf{H} = 0$

67. Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова-Пойнтинга.

Из системы уравнений Максвелла следует теорема Умова-Пойнтинга, выражающая закон сохранения энергии в электромагнитном поле:

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} - \int_V \vec{j} \vec{E} dV ,$$

где $W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV$ – энергия электромагнитного поля в объеме V, ограниченном

замкнутой поверхностью S, $\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}]$ – вектор Пойнтинга, имеющий смысл плотности потока энергии через границу S, Q – выделяемое в объеме V тепло.

68. Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла.

Из системы уравнений Максвелла для напряженности электрического поля можно получить так называемое волновое уравнение:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = 0 ,$$

где $c = (\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$. В общем случае волновое уравнение описывает некоторое возмущение электромагнитного поля, распространяющееся в среде со скоростью c, которую обычно представляют в виде:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \mu}} , \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

Существование электромагнитных волн

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho = 0$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} =$$

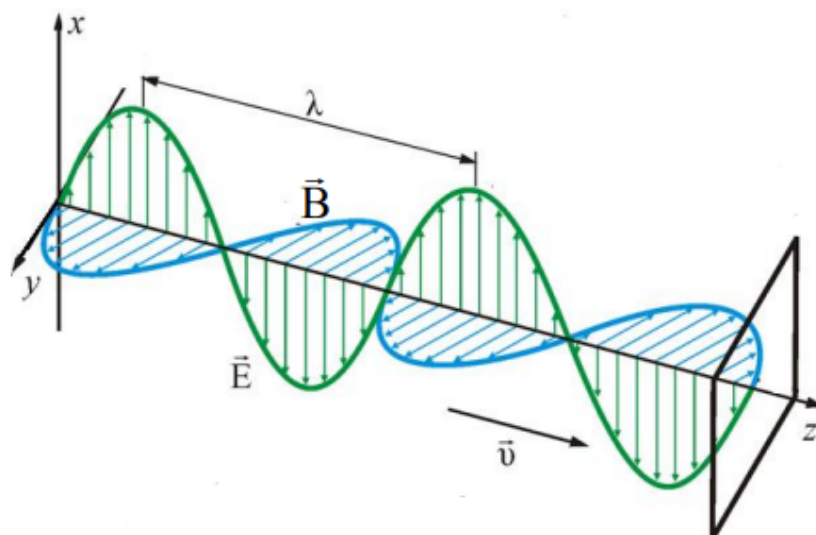
$$= - \frac{\partial}{\partial t} \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \mu \mu_0 = - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 = \frac{\epsilon \mu}{c^2} = \frac{1}{v^2}$$

69. Что такое плоская волна. (?)

Электромагнитная волна называется плоской, если вектор волны имеет одну и ту же величину во всех точках любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

70. Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне.



71. Чему равны плотность потока энергии электромагнитной волны.

Объёмная плотность энергии, переносимой волной, равна $w = \epsilon \epsilon_0 E^2$.

Плотность потока энергии электромагнитной волны, т.е. энергия, переносимая волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, характеризуется вектором Пойнтинга:

$$\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}] = w c \vec{n}$$

или:

$$S = \frac{\Delta W}{s \Delta t} = w c$$

Плотность потока импульса электромагнитной волны – произведение плотности импульса на скорость распространения:

$$\vec{j}_p = \vec{p}_0 c = \frac{\vec{S}}{c}$$

72. Обоснуйте возможность введения скалярного и векторного потенциалов нестационарного электромагнитного поля. **ОБОСНОВАНИЯ, КРОМЕ ЭТОГО, В ЛЕКЦИЯХ НЕТ**

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) / \partial t - \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

73. Запишите условие калибровки Лоренца.

Калибровка векторного потенциала — наложение дополнительных условий, позволяющих однозначно вычислить векторный потенциал электромагнитного поля (в электродинамике, векторный потенциал, ротор которого равен магнитной индукции $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$) для решения тех или иных физических задач.

Калибровка Лоренца— выбор векторного потенциала электромагнитного поля в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \text{ где } \phi - \text{ электростатический потенциал.}$$

Эта калибровка применяется для рассмотрения динамических задач. Калибровка Лоренца сохраняется при преобразованиях Лоренца.

74. Запишите уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля.

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad \Delta \phi - \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho(\mathbf{r}, t) / \epsilon\epsilon_0$$

75. Какой вид имеют решения уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \oint \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

76. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля электронейтральной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.

Скалярный и векторный потенциалы переменных во времени полей

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) / \partial t - \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \vartheta(\mathbf{r}, t) \quad \varphi_1 = \varphi - \partial \vartheta(\mathbf{r}, t) / \partial t$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) / \partial t - \operatorname{grad} \varphi_1(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) / \partial t - \operatorname{grad} \varphi_1(\mathbf{r}, t) = -\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) / \partial t - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \vartheta} - \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}, t) + \operatorname{grad} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) / \partial t - \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}, t)$$

Условие калибровки Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \partial \varphi(\mathbf{r}, t) / \partial t = 0$$

Уравнение для скалярного и векторного потенциалов

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mu \mu_0 (\mathbf{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t) = \mu \mu_0 \mathbf{j} + \\ &+ \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\operatorname{grad} \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t) = \mu \mu_0 \mathbf{j} - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \\ &- \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{grad}(\partial \varphi / \partial t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = 0 \\ \mu \mu_0 \mathbf{j} - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{grad}(\partial \varphi / \partial t) &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon \varepsilon_0} &= \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t) = -\Delta \varphi - \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = \\ &= -\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{A}) = -\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \\ &= -\Delta \varphi + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Условие калибровки

$$\Delta \varphi - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho(\mathbf{r}, t) / \varepsilon \varepsilon_0$$

Решение уравнений для скалярного и векторного потенциалов



$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \oint \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

79. Чему равна средняя мощность, излучаемая электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее.

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является колеблющийся электрический диполь. Примером такого диполя может служить система, образованная неподвижным точечным зарядом $+q$ и колеблющимся около него точечным зарядом $-q$. Дипольный электрический момент этой системы изменяется со временем по закону

$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r} = -ql\mathbf{e} \cos \omega t = \mathbf{p}_m \cos \omega t,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор заряда $-q$, l — амплитуда колебаний, $\mathbf{e}$ — единичный [вектор](#), направленный вдоль оси [диполя](#), $\mathbf{p}_m = -ql\mathbf{e}$

Рассмотрим излучение диполя, размеры которого малы по сравнению с длиной волны $l \ll \lambda$. Такой [диполь](#) называется элементарным. В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля очень сложна. Она сильно упрощается в так называемой волновой зоне диполя, которая начинается на расстояниях, значительно превышающих длину волны. Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то волновой фронт в волновой зоне будет сферическим.

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в каждой точке взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к лучу, т. е. радиус-вектору, проведенному в данную точку из центра диполя.

Назовем сечения волнового фронта плоскостями, проходящими через ось диполя, меридианами, а плоскостями, перпендикулярными к оси диполя, — параллелями. Тогда можно сказать, что вектор $\mathbf{E}$ в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, а вектор $\mathbf{H}$ — по касательной к параллели.

Если смотреть вдоль луча $\mathbf{r}$, то мгновенная картина волны будет такой же, как на рис. 105.1, с тем отличием, что амплитуда при перемещении вдоль луча постепенно убывает.

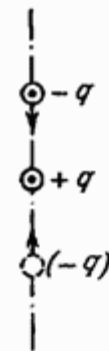


Рис. 109.1.

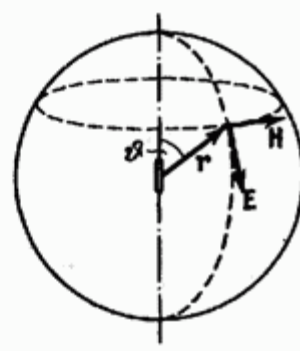


Рис. 109.2.

В каждой точке $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$. Амплитуды H_m и E_m зависят от расстояния r до излучателя и от угла θ между направлением радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и осью [диполя](#). Эта зависимость для вакуума имеет следующий вид:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \theta.$$

Среднее значение плотности

потока энергии $\langle S \rangle$ пропорционально произведению $H_m E_m$

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta.$$

Из этой формулы вытекает, что интенсивность волны изменяется вдоль луча (при $\theta = \text{const}$) обратно пропорционально, квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, она зависит от угла θ . Сильнее всего излучает [диполь](#) в направлениях, перпендикулярных к его оси ($\theta = \pi/2$). В направлениях, совпадающих с осью ($\theta = 0$ и π), диполь не излучает.

Соответствующий расчет дает, что мощность излучения диполя P (т. е. энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу времени) пропорциональна квадрату [второй производной дипольного момента](#) по времени:

$$P \sim \ddot{p}^2. \quad (109.3)$$

Согласно формуле (109.1) $\ddot{p}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$. Подстановка этого значения в (109.3) дает

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (109.4)$$

Усреднив это выражение по времени, получим

$$\langle P \rangle \sim p_m^2 \omega^4. \quad (109.5)$$

Согласно (109.1) $\ddot{p} = -q\ddot{r} = -qw$, где w — ускорение колеблющегося заряда. Подстановка этого выражения для $\ddot{p}$ в формулу (109.3) дает, что¹

$$P \sim q^2 w^2. \quad (109.6)$$

80. Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов.

К квазистационарным процессам относятся все электромагнитные процессы, в которых можно пренебречь токами смещения. (упрощение для прикладных задач, см. 66)

81. Приведите примеры расчета тока в электрических цепях при переходных процессах (RC- и RL-цепи).

(см. 12 параграф задачника)

82. Собственные колебания в колебательном контуре. *Амплитуда и начальная фаза при гармонических колебаниях.*

Колебательный контур — это электрическая цепь, содержащая индуктивность L , емкость C и сопротивление R , в которой могут возбуждаться электрические колебания.

Можно привести аналогию с механическими колебаниями:

Механические величины	Электрические величины
Координата x	Заряд q
Скорость v	Сила тока i
Масса m	Индуктивность L
Жесткость пружины k	Величина, обратная емкости $1/C$
Потенциальная энергия $kx^2/2$	Энергия электрического поля $q^2/(2C)$
Кинетическая энергия $mv^2/2$	Энергия магнитного поля $Li^2/2$

Гармонические колебания заряда и тока описываются теми же уравнениями, что и их механические аналоги:

$$q = q_m \cos \omega_0 t,$$

$$i = q' = -\omega_0 q_m \sin \omega_0 t = I_m \cos (\omega_0 t + \pi/2),$$

где q_m — амплитуда колебаний заряда, $I_m = \omega_0 q_m$ — амплитуда колебаний силы тока.

Колебания силы тока опережают по фазе на $\pi/2$ колебания заряда.

Частота равна $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, период — $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi LC$.

83. Уравнение затухающих колебаний и его решение, время затухания.

Понятие механических колебаний включает в себя, наряду с гармоническими колебаниями, другие виды колебательного движения.

Колебательным называется такое движение, которое многократно повторяется или приблизительно повторяется через определенные промежутки времени.

Периодом колебаний называется минимальный промежуток времени, через который движение механической системы повторяется. **Амплитуда колебания** – это величина наибольшего отклонения механической системы от положения равновесия. **Свободными** называются колебания, которые механическая система совершает около положения равновесия после того, как она была выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе.

Свободные колебания в отсутствие трения (сопротивления среды) являются гармоническими.

Примерами свободных гармонических колебаний

служат колебания систем под действием упругих или квазиупругих сил. Частота свободных колебаний системы в отсутствие сил трения и сопротивления среды называется **собственной частотой** механической системы. **Затухающими** колебаниями называются свободные колебания механической системы при наличии сил трения или сил сопротивления среды.

Выведем тело из положения равновесия, растянув или сжав пружину, после чего предоставим механическую систему самой себе. В процессе движения на тело действует сила упругости пружины и сила сопротивления среды, которая в простейшем случае пропорциональна модулю скорости тела и направлена противоположно скорости: $\vec{F}_{упр} = -k\vec{x}$, $\vec{F}_{сопр} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления среды. Уравнение движения тела в проекции на ось x , параллельную оси пружины имеет вид: $\frac{md^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$ или

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$, где $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; ω_0 - представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды (при $r = 0$). Эту частоту называют **собственной частотой** системы.

Выражение $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$ называется **дифференциальным уравнением затухающих колебаний**.

Найдем решение дифференциального уравнения затухающих колебаний.

Примечание. В курсе математического анализа доказывается, что решение дифференциального уравнения типа $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ следует искать в виде $s = e^{\lambda t}$, а общее решение уравнения $s = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, где C_1 и C_2 - постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий; λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения. Найдем характеристическое уравнение, для этого подставим выражение $s = e^{\lambda t}$ в дифференциальное уравнение $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$. Если $\beta < \omega_0$, то корни квадратного уравнения комплексно-сопряженные: $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega'$, где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $s = e^{-\beta t} [C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}]$ или на основании формулы Эйлера для комплексных чисел $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ общее решение имеет вид: $s = e^{-\beta t} [(C_1 + C_2) \cos \omega' t + i(C_1 - C_2) \sin \omega' t]$. Вводя вместо C_1 и C_2 новые постоянные A_0 и φ_0 , связанные с C_1 и C_2 соотношениями $C_1 + C_2 = A_0 \sin \varphi_0$, а $i(C_1 - C_2) = A_0 \cos \varphi_0$ окончательно имеем $s = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \varphi_0)$ или $s = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \phi_0)$. Постоянные величины A_0 , φ_0 и ϕ_0 зависят от начальных условий, т.е. от значения s и $\frac{ds}{dt}$ в начальный момент времени.

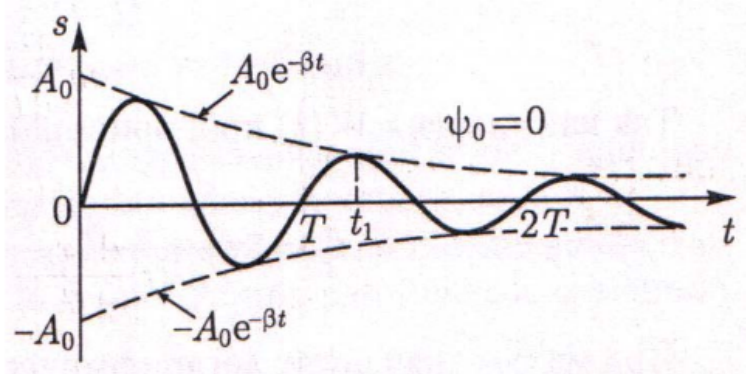
В зависимости от соотношений между величинами β и ω_0 существует три типа решений уравнения:

если $\beta < \omega_0$ - затухающие колебания,

если $\beta \ll \omega_0$ - слабое затухание,

если $\beta > \omega_0$ - сильное затухание.

График зависимости $x = f(t)$ при затухающих колебаниях изображен на рисунке.



84. Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы
+

85. Формулы для амплитуды и фазы.

Рассмотрим электромагнитный колебательный контур, в котором помимо ёмкости, индуктивности, сопротивления есть ещё и генератор переменного напряжения, то есть источник электрической энергии. В таком контуре со временем установятся вынужденные колебания тока с частотой генератора и с постоянной амплитудой; подвод энергии от генератора будет в точности компенсировать потери энергии на сопротивлении.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний заряда в электромагнитном контуре в стандартном (каноническом) виде получается следующим:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{1}{L} E(t) \quad \text{или} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L} E(t)$$

которое полностью аналогично уравнению вынужденных колебаний пружинного маятника.

Э.д.с. генератора $E(t) = E_0 \cos \Omega t$. Поэтому сразу можем написать решение:

$$q = q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$q_0 = \frac{E_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{E_0}{\Omega \sqrt{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})^2}}$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}$$

Резонансная частота колебаний заряда на обкладках конденсатора запишется также по аналогии с резонансной частотой механических колебаний маятника:

$$\Omega = \Omega_y = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Напомню, что в электрическом контуре:

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \text{и} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Напомню, что $-\varphi$ является сдвигом фазы между напряжением генератора $E(t) = E_0 \cos \Omega t$ и током в цепи. В такой записи знак минус показывает, что напряжение первично, а ток отстает по фазе.

Формулы для амплитуды тока и сдвига фаз выглядят так:

$$I_0 = q_0 \Omega = \frac{E_0}{\Omega \sqrt{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}$$

Существенное отличие колебаний тока от колебаний заряда состоит в том, что резонансная частота для тока не зависит от сопротивления; она просто равна собственной частоте свободных колебаний в контуре:

$$\Omega_y = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

86. Резонанс токов

Резонанс токов (параллельный резонанс) — резонанс, происходящий в параллельном колебательном контуре при его подключении к источнику напряжения, частота которого совпадает с резонансной частотой контура.

Имеется параллельный колебательный контур, состоящий из резистора R , катушки индуктивности L и конденсатора C . Контур подключен к источнику переменного напряжения с частотой ω . Резонансная частота контура:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{1/\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right]} = \left|\frac{\dot{U}}{Z}\right| e^{-j\phi}$$

С помощью метода комплексных амплитуд определим ток в контуре, где:

$$Z = \frac{(\omega L)^2 R - j\omega L R^2 (\omega^2 LC - 1)}{(\omega L)^2 + R^2 (\omega^2 LC - 1)^2}$$

– комплексное сопротивление параллельного контура,

$$\phi = \arctan\left(-\frac{R(\omega^2 LC - 1)}{\omega L}\right)$$

– сдвиг фаз между током и напряжением.

Кроме того, полный ток контура является суммой токов, протекающих через конденсатор и катушку индуктивности:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{j\omega L} + j\omega C \dot{U} = \frac{\dot{U}}{R} + \left(\frac{-j\dot{U}}{\omega L}\right) + \dot{U} j\omega C$$

Как видно из последнего выражения, токи $\dot{I}_L$ и $\dot{I}_C$ текут в противофазе (у одного множитель $-j$, а у другого - множитель j).

При резонансной частоте амплитуда тока в $\omega = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ контуре примет значение $I_p = \frac{U}{R} = I_R$. Амплитуды токов через катушку индуктивности и конденсатор, пропорциональные напряжению, при резонансной частоте имеют значения

$$I_{Lp} = \frac{U}{\omega_p L} = U \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{\rho};$$

$$I_{Cp} = U (\omega_p C) = U \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{\rho},$$

где ρ - характеристическое (волновое) сопротивление контура и равно .

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Следовательно, на резонансной частоте токи, текущие в реактивных элементах, превышают общий ток в R / ρ раз.

87. Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд (описание, обоснование, пример).

При наличии в цепи источника гармонической ЭДС установившийся режим может быть найден методом комплексных амплитуд. Метод основан на известном приеме решения дифференциальных уравнений с гармонической правой частью, когда решение ищется в комплексной форме. Применительно к теории электрических цепей ЭДС источника вида $E(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi)$ заменяется комплексным изображением $E = \check{E} \exp(i\omega t)$, где $\check{E}$ – комплексная амплитуда: $\check{E} = E_0 \exp(i\phi)$. Аналогично вводятся комплексные амплитуды искомых токов $\check{I}_k$. Пользуясь обычными правилами Кирхгофа, можно составить систему уравнений для

комплексных амплитуд (минуя процедуру составления дифференциальных уравнений), если записать выражения для падений напряжения на элементах в комплексном виде:

$\dot{U}_R = \dot{I}R$, $\dot{U}_C = \dot{I}/i\omega C$, $\dot{U}_L = \dot{I}i\omega L$. Эту систему можно переписать в виде:

$$\dot{U} = \dot{I}Z,$$

где $Z_R=R$, $Z_C= 1/i\omega C$, $Z_L= i\omega L$, Z – комплексное сопротивление (импеданс) соответствующего элемента.

Следует помнить, что действительная амплитуда тока или напряжения – это модуль соответствующей комплексной переменной, а фаза – ее аргумент.

(примеры в параграфе 12, можно взять из вопроса 86)

88. Что такое эффективные значения силы тока и напряжения. Запишите формулу для мощности переменного тока.

Силу переменного тока (напряжения) можно охарактеризовать при помощи амплитуды.

Однако амплитудное значение тока непросто измерить экспериментально. Силу переменного тока удобно связать с каким-либо действием, производимым током, не зависящим от его направления. Таковым является, например, тепловое действие тока. Поворот стрелки амперметра, измеряющего переменный ток, вызывается удлинением нити, которая нагревается при прохождении по ней тока.

Действующим или эффективным значением переменного тока (напряжения) называется такое значение постоянного тока, при котором на активном сопротивлении выделяется за период такое же количество теплоты, как и при переменном токе.

Свяжем эффективное значение тока с его амплитудным значением. Для этого рассчитаем количество теплоты, выделяемое на активном сопротивлении переменным током за время, равное периоду колебаний. Напомним, что по закону Джоуля-Ленца количество теплоты, выделяющееся на участке цепи с сопротивлением R при *постоянном* токе I за время t , определяется по формуле $Q = I^2 R \cdot t$. Переменный ток можно считать постоянным только в течение очень малых промежутков времени dt . Поделим период колебаний T на очень большое число малых промежутков времени dt . Количество теплоты dQ , выделяемое на сопротивлении R за время dt : $dQ = I^2 R \cdot dt$. Общее количество теплоты, выделяемое за период, найдется суммированием теплот, выделяемых за отдельные малые промежутки времени, или, другими словами, интегрированием:

$$Q = \int_0^T I^2 R \cdot dt.$$

Сила тока в цепи изменяется по синусоидальному закону

$$I = I_0 \sin(\omega \cdot t),$$

тогда

$$Q = \int_0^T I_0^2 \sin^2(\omega \cdot t) R \cdot dt = I_0^2 R \int_0^T \sin^2(\omega \cdot t) dt.$$

Опуская вычисления, связанные с интегрированием, запишем окончательный результат

$$Q = \frac{1}{2} I_0^2 R T.$$

Если бы по цепи шёл некоторый постоянный ток I , то за время, равное T , выделилось бы тепло $Q = I^2 RT$. По определению постоянный ток I , оказывающий такое же тепловое действие, что и переменный, будет равен эффективному значению переменного тока $I_{\text{эф}}$. Находим эффективное значение силы тока, приравнявая теплоты, выделяемые за период, в случаях постоянного и переменного токов

$$\frac{1}{2} I_0^2 RT = I_{\text{эф}}^2 RT \Rightarrow I_{\text{эф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (4.28)$$

Очевидно, точно такое же соотношение связывает эффективное и амплитудное значения напряжения в цепи с синусоидальным переменным током:

$$U_{\text{эф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (4.29)$$

Например, стандартное напряжение в сети 220 В – это эффективное напряжение. По формуле (4.29) легко посчитать, что амплитудное значение напряжения в этом случае будет равно 311 В.

89. В чем заключается скин-эффект. Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях. Зависимость толщины скин-слоя от частоты.

(http://genphys.phys.msu.ru/rus/lab/elmag/Lab316_141017.pdf – длинно, но понятно)

Скин-эффект - это физическое явление, заключающееся в неоднородном распределении плотности переменного тока по сечению проводника: она достигает наибольшего значения у его поверхности и уменьшается с глубиной. При очень больших частотах ток практически существует только в тонком поверхностном слое.

Простой пример – участок цилиндрического проводника.

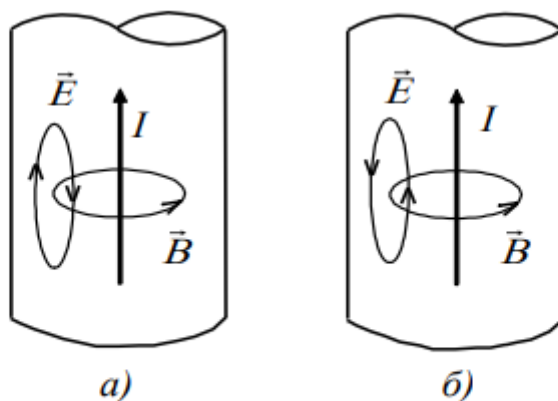


Рис. 1. Вытеснение переменного тока к поверхности проводника при скин-эффекте: а) – ток I нарастает; б) – ток I убывает.

Рассмотрим момент времени, когда ток I возрастает. Вместе с ним возрастает и создаваемое им магнитное поле с индукцией B .

При этом появляется вихревое электрическое поле E , которое у поверхности проводника направлено так же, как и ток I , а на оси проводника - противоположно току. Следовательно, это поле будет усиливать ток I у поверхности (ускорять электроны проводимости) и ослаблять его на оси проводника.

Если же ток I уменьшается (рис. 1б), то ослабевающее вместе с ним магнитное поле B вызовет электрическое поле E , которое будет направлено противоположно по сравнению

с первым рассмотренным случаем, т.е. у поверхности проводника будет противоположно току, а на оси - совпадать с током.

Таким образом, как бы ни изменялась сила тока в проводнике, индуцируемое им вихревое электрическое поле на оси проводника препятствует, а у поверхности проводника способствует изменениям тока. Следовательно, на оси проводника ток слабее, а у поверхности – сильнее.

Имеет место формула:

$$e = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \mu_r f \sigma}},$$

где e – глубина проникновения (м), μ_r – магнитная проницаемость материала, f – частота переменного тока (Гц) σ – проводимость материала (Ом^{-1}).

90. Сформулируйте и запишите закон сохранения импульса для частиц в электромагнитном поле.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \oint_V [\mathbf{D} \times \mathbf{B}] dv = 0 \quad \mathbf{g} = [\mathbf{D} \times \mathbf{B}]$$

- плотность импульса
электромагнитного поля

91. Функция Лагранжа движущейся в электромагнитном поле заряженной частицы.

§ 52. Уравнения движения заряженной частицы в поле. Функция Лагранжа

Общая задача классической микроэлектродинамики состоит в определении поля движущихся под действием сил заряженных частиц (§ 22). Эта задача не могла быть решена классической электродинамикой в общем виде. Рассмотрим здесь некоторые ее простейшие случаи в предположении, что движение частиц подчиняется установленным в § 19 законам, применимым при больших скоростях.

Уравнение движения квазичастичной частицы с зарядом e и массой покоя m_0 во внешнем электромагнитном поле согласно (22.04) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right). \quad (52.01)$$

В механике широко используются уравнения движения в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (52.02)$$

где L – функция Лагранжа, q – одна из обобщенных координат, $\dot{q}$ – обобщенная скорость. Найдем функцию Лагранжа, приводящую к уравнению движения (52.01).

При отсутствии внешнего поля уравнение (52.01) сводится к $\frac{d}{dt} \vec{p} = 0$. Импульс равен¹ $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Отсюда с точ-

¹ Под $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ понимается вектор с составляющими $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$. Аналогично $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ есть $\text{grad } L$.

ностью до постоянной функция Лагранжа свободной частицы равна

$$L = m_0 \int \frac{\vec{v} d\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (52.03)$$

Для частицы в электромагнитном поле положим

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + L'.$$

Тогда сила Лоренца, стоящая в правой части (52.01), равна

$$\vec{F} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}} + \frac{\partial L'}{\partial \vec{r}}, \quad (52.04)$$

Так как сила Лоренца содержит гироскопический член $[\vec{v}, \vec{B}]$, то L' должна содержать члены линейные относительно скорости. Поэтому положим

$$L' = \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A} - e\varphi,$$

где φ и $\vec{A}$ – соответственно скаляр и вектор, зависящие от координат частицы и времени. Определим φ и $\vec{A}$ путем сравнения (52.04) с (52.01). Согласно (52.04)

$$\vec{F} = -\frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{v} \vec{A}) - e \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}}.$$

Так как

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{A},$$

то

$$\vec{F} = -e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{v} \vec{A}) - \left(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{A} \right\}.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{v} \vec{A}) - \left(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{A} = \left[\vec{v}, \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \vec{A} \right] \right] = [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}],$$

поэтому

При $v \ll c$ первый член переходит в $-m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$. Из (52.06) находим, что обобщенный импульс частицы в электромагнитном поле складывается из количества движения $m\vec{v}$ и «потенциального импульса» $\frac{e}{c} \vec{A}$,

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (52.07)$$

В заключение определим функцию Гамильтона

$$H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (52.08)$$

На основании (52.07)

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2}.$$

Поэтому функция Гамильтона принимает вид

$$H = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\varphi. \quad (52.09)$$

В случае поля, не зависящего от времени, H дает полную энергию частицы.

Система единиц СИ и система единиц Гаусса

$$j \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{1/2} j \quad Q \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{1/2} Q \quad \rho \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{1/2} \rho \quad \epsilon \Rightarrow \epsilon\epsilon_0$$

$$\sigma \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)\sigma \quad C \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)C \quad E \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{-1/2} E \quad \mu \Rightarrow \mu\mu_0$$

$$D \Rightarrow (\epsilon_0 / 4\pi)^{1/2} D \quad H \Rightarrow (4\pi\mu_0)^{-1/2} H \quad B \Rightarrow (\mu_0 / 4\pi)^{1/2} B$$

$$\Phi \Rightarrow (\mu_0 / 4\pi)^{1/2} \Phi \quad L \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{-1} L \quad P \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)P$$

$$R \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{-1} R \quad A \Rightarrow (\mu_0 / 4\pi)^{1/2} A \quad \varphi \Rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{-1/2} \varphi$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot}(4\pi\mu_0)^{-1/2} \mathbf{H} = (4\pi\epsilon_0)^{1/2} \mathbf{j} + \frac{\partial(\epsilon_0 / 4\pi)^{1/2} \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Уравнения Максвелла в системе единиц Гаусса

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$$

Здесь c – скорость света в некоторой конкретной инерциальной системе координат.

Попробуем применить к уравнениям Максвелла преобразования Галлилея (а не Лоренца):

$$\{x' = x - vt; y' = y; z' = z; t' = t\}$$

Получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t'} - v \frac{\partial E_x}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} - \frac{v}{c} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \right),$$

Далее, получим:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(H_z - \frac{v}{c} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left(H_y + \frac{v}{c} E_z \right)$$

Введём обозначения:

$$E_x' = E_x, H_z' = H_z - \frac{v}{c} E_y, H_y' = H_y + \frac{v}{c} E_z$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot} \mathbf{H} \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

Следовательно, сделав подстановку, придём в штрихованной системе к аналогичному указанному выше выражению.

Также получим:

$$H_x' = H_x, E_y' = E_y - \frac{v}{c} H_z, E_z' = E_z + \frac{v}{c} H_y$$

Попробуем вернуться назад, используя те же преобразования.

Например, для H_z :

$$H_z'' = H_z' + \frac{v}{c} E_y' = H_z - \frac{v}{c} E_y + \frac{v}{c} \left(E_y - \frac{v}{c} H_z \right) = H_z \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Должны были получить H_z , но не получили. Поэтому система уравнений Максвелла неинвариантна относительно преобразований Галлилея.

93. Постулаты теории относительности.

Специальная теория относительности — теория, описывающая [движение](#), законы [механики](#) и [пространственно-временные](#) отношения при произвольных [скоростях](#) движения, меньших [скорости света](#) в вакууме, в том числе близких к скорости света.

Постулат 1 (принцип относительности Эйнштейна). Законы природы одинаковы во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга [8]. Это означает, что форма зависимости физических законов от пространственно-временных координат должна быть одинаковой во всех ИСО, то есть законы инвариантны относительно переходов между ИСО. Принцип относительности устанавливает равноправие всех ИСО.

Постулат 2 (принцип постоянства скорости света). Скорость света в вакууме одинакова во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга[8].

Принцип постоянства скорости света противоречит классической механике, а конкретно — закону сложения скоростей. При выводе последнего используется только принцип относительности Галилея и неявное допущение одинаковости времени во всех ИСО. Таким образом, из справедливости второго постулата следует, что время должно быть относительным — неодинаковым в разных ИСО. Необходимым образом отсюда следует и то, что «расстояния» также должны быть относительны. В самом деле, если свет проходит расстояние между двумя точками за некоторое время, а в другой системе — за другое время и притом с той же скоростью, то отсюда непосредственно следует, что и расстояние в этой системе должно отличаться.

Постановка вопроса. Пусть имеются две инерциальные системы отсчета: K -система и движущаяся относительно нее со скоростью v_0 система K' . В некоторой пространственно-временной точке K -системы отсчета известны значения полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Какими будут значения полей $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ в той же самой пространственно-временной точке в K' -системе отсчета? Напомним, что одной и той же пространственно-временной точкой называют такую, координаты и время которой в обеих системах отсчета связаны между собой преобразованиями Лоренца*.

Ответ на этот вопрос, как уже было сказано, дает теория относительности, которая показывает, что **законы преобразования полей** выражаются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{B}_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \\ \mathbf{E}_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & \mathbf{B}_{\perp} &= \frac{\mathbf{B}_{\perp} - [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Здесь символами $\parallel$ и $\perp$ отмечены продольные и поперечные (по отношению к вектору $\mathbf{v}_0$) составляющие электрического и магнитного полей, $\beta = v_0/c$, c — скорость света в вакууме ($c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$).

$$* x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - x v_0/c^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}.$$

Эти же формулы, записанные в проекциях, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B'_y &= \frac{B_y + v_0 E_z/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - v_0 E_y/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

где предполагается, что оси координат X и X' направлены вдоль вектора $\mathbf{v}_0$, ось Y' параллельна оси Y , ось Z' — оси Z .

Поскольку векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, характеризующие электромагнитное поле, зависят от системы отсчета (в той же самой пространственно-временной точке), возникает естественный вопрос об инвариантах, т. е. не зависящих от системы отсчета количественных характеристиках электромагнитного поля.

Можно показать, что существуют два таких инварианта, представляющие собой комбинации векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, это

$$\boxed{\mathbf{E}\mathbf{B} = \text{inv.}, \quad E^2 - c^2 B^2 = \text{inv.}} \quad (8.9)$$

Инвариантность этих величин (относительно преобразований Лоренца) является следствием формул преобразования полей (8.1) или (8.2). Более подробно этот вопрос рассмотрен в задаче 8.9.

Использование данных инвариантов позволяет в ряде случаев быстро и просто находить решение и делать соответствующие выводы и предсказания. Приведем наиболее важные из них.

1. Из инвариантности $\mathbf{E}\mathbf{B}$ сразу следует, что в случае, когда в какой-либо системе отсчета $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, т. е. $\mathbf{E}\mathbf{B} = 0$, то и во всех других инерциальных системах отсчета $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$.

2. Из инвариантности $E^2 - c^2 B^2$ следует, что в случае, когда $E = cB$ (т. е. $E^2 - c^2 B^2 = 0$), то и в любой другой инерциальной системе отсчета $E' = cB'$.

3. Если в какой-либо системе отсчета угол между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ острый (или тупой), — это значит, что $\mathbf{E}\mathbf{B}$ больше (либо меньше) нуля, — то угол между векторами $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ также будет острым (или тупым) во всякой другой системе отсчета.

4. Если в какой-либо системе отсчета $E > cB$ (или $E < cB$) — это значит, что $E^2 - c^2 B^2$ больше (либо меньше) нуля, — то в любой другой системе отсчета будет также $E' > cB'$ (или $E' < cB'$).

5. Если оба инварианта равны нулю, то во всех системах отсчета $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ и $E = cB$. Именно это и наблюдается, как мы увидим, в электромагнитной волне.

6. Если равен нулю только инвариант $\mathbf{E}\mathbf{B}$, то можно найти такую систему отсчета, в которой или $\mathbf{E}' = 0$, или $\mathbf{B}' = 0$; какое именно, определяется знаком другого инварианта. Справедливо и обратное утверждение: если в какой-либо системе отсчета $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{B} = 0$, то во всякой другой системе отсчета $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$. (Этот вывод был уже в § 8.3.)

И последнее. Нужно помнить, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, вообще говоря, зависят и от координат, и от времени. Поэтому каждый из инвариантов (8.9) относится к одной и той же пространственно-временной точке поля, координаты и время которой в разных системах отсчета связаны преобразованиями Лоренца.

Новые вопросы, здесь не встретившиеся:

77. Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.
78. Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее.